Prof. Dr. Jakob Stix
Ruth Wild

Sommersemester 2025

Algebraische Geometrie II
Blatt 1

Besprochen: 6. Mai

Zuerst zwei Aufgaben zur Wiederholung:

Aufgabe 1.
Sei A ein lokaler Integritätsring von Dimension 1, und $X = \mathrm{Spec}(A)$. Sei $K = \mathrm{Frac}(A)$.

(i) Beschreibe den topologischen Raum X.

(ii) Zeige, dass das Datum von einem $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{F}$ äquivalent ist zu dem Datum von einem A-Modul M, einem K-Vektorraum V und einem Morphismus von K-Vektorräumen $\rho : M \otimes_A K \xrightarrow{\sim} V$.

(iii) Zeige, dass $\mathcal{F}$ genau dann quasi-kohärent ist wenn ρ ein Isomorphismus ist.

Aufgabe 2.
Sei S ein Basisschema, und X, Y zwei affine Schema über S.

(i) Angenommen, S ist separiert. Dann ist auch $X \times_S Y$ affin.

(ii) Gebe ein Beispiel das zeigt das für nicht-affine S das Schema $X \times_S Y$ nicht notwendigerweise affin ist.

Aufgabe 3.

(i) Sei K ein Körper. Finde algebraisch unabhängige Elemente $a_1, \dots, a_n$ so dass

$$K[x_1, x_2, x_3]/(x_1 x_2)$$

endlich über $K[a_1, \dots, a_n]$ ist.

(ii) Zeige dass die analoge Aussage von Noether-Normalisierung über $\mathbb{Z}$ im Allgemeinen nicht gilt. Betrachte dazu das Beispiel $\mathbb{Z}[x_1, x_2]/(2x_1x_2 - 1)$.

Aufgabe 4.

(i) Sie K ein Körper von Charakteristik $\neq 2$. Zeige, dass die Abbildung $\mathrm{Spec}(k[t]) \to \mathrm{Spec}(k[x, y]/y^2 - x(x^2 + 1))$ eine Normalisierung ist.

(ii) Sei $R \hookrightarrow S$ eine Ringerweiterung. Zeige, dass R ganz abgeschlossen in S ist genau dann wenn $R[x]$ ganz abgeschlossen in $S[x]$ ist.

Schriftart der Woche: Gulax